УДК 632.51

В.М. Ігнатенко,
М.І. Волченко

ПРОГНОЗОВАНЕ ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ВИТРАТОЮ ПАЛИВА УПРАВЛІННЯ НЕСТАЦІОНАРНИМИ СИСТЕМАМИ

Розглянуто проблеми побудови оптимального за витратами палива управління нестаціонарними динамічними системами. Наведено аналітичний огляд сучасного стану проблеми, що вирішується, доведено необхідні і достатні умови існування оптимального за витратами палива систем управліняя.

Ключові слова: Нестаціонарна система управління, принцип максимуму,

Сучасний рівень розвитку комп'ютерної техніки, засобів автоматизації та робототехніки дозволяє на практиці вирішувати складні оптимізаційні задачі для нелінійних систем та процесів. До цього класу можна також віднести і задачу синтезу оптимального за витратою палива управління нестаціонарними динамічними системами, які структурно можуть бути подані послідовним з'єднанням лінійних ланок першого порядку і описуються векторним диференціальним рівнянням наступного виду:

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = A(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)u(t), \tag{1}$$

де: $\bar{x}(t)$= $[x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)]$ — n — вимірний вектор стану системи;

$A(t)$=$[a_{ij}(t)]$ = $\begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1,n}(t) & a_{n,n}(t) \end{bmatrix}$ — матриця коефіцієнтів системи;

$\bar{b}(t)$=$[b_i(t)] = [b_1(t),0,0,\ldots 0]$, n — вимірний вектор стовпець; ($i = \overline{1,n}$)

u(t) — управління, що обмежено умовою:

$$|u| \leq u_{max} \tag{2}$$

Задача управління в даному випадку полягає у визначенні допустимих керуючих впливів, які задовольняють умові (2) та переводять систему (1) на інтервалі часу $[t_0,t_1]$ з початкового стану $\bar{x}(t_0)$= $\bar{x}^0$= $[x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0]$ в кінцевий (термінальний) стан $\bar{x}(t_1)$= $\bar{x}^1$= [0,0,…,0], забезпечуючи при цьому мінімальне значення функціонала виду

$$F(u,t)=\int_{t_0}^{t_1}(k + |u|)dt, \tag{3}$$

який враховує як витрати палива, так і час траєкторного руху системи. Тут $k > 0$, а значення t_1 заздалегідь не зафіксоване.

Що до функцій a_{ij}(t) та $b_1(t)$, які є коефіцієнтами системи рівнянь (1), то припускаємо, шо вони знакопостійні на інтервалі $[0 < t < \infty]$, мають відповідну неперервну похідну та область визначення:

$$a_{ij}^{min} \leq a_{ij}(t) \leq a_{ij}^{max}$$
$$b_1^{min} \leq b_1(t) \leq b_1^{max},$$

при цьому
$$\left|\dot{a}_{ij}(t)\right| < \dot{a}_{ij}^{max} \tag{4}$$

$$\left|\dot{b}_1(t)\right| < \dot{b}_1^{max}$$

Оскільки для динамічної системи, яка описується рівнянням (1), для будь-якого $t \in (0,\infty)$ виконується умова спільності положення, що відповідає лінійній незалежності наступних векторів

$$Q_1(t) = b_1(t), \quad Q_k(t) = A(t)Q_{k-1} - \frac{d}{dt}Q_{k-1}(t), \tag{5}$$

то згідно [2], дана задача оптимального за витратою палива управління є невиродженою.

Як відомо, принцип максимума Понтрягіна [1], що дає необідні умови оптимальності та дозволяє визначити в даному випадку екстремальне управління $u^*(t)$, що абсолютно мінімізує функціонал (3), як кусково — сталу функцію виду

$$u^*(t) = dez\langle b_1(t)\psi_1(t)\rangle, \tag{6}$$

яка приймає наступні значення:

$$u^*(t) = 0, \qquad \text{при} \qquad |b_1(t)\psi_1(t)| < 1, \tag{7}$$

$$u^*(t) = sign\{b_1(t)\psi_1(t)\} \text{ при } \qquad |b_1(t)\psi_1(t)| > 1 \;;$$

$$0 \le u(t) \le 1, \qquad \text{при} \qquad b_1(t)\psi_1(t) = 1, \quad t \in [T_1, T_2], \tag{8}$$

$$-1 \le u(t) \le 0, \qquad \text{при} \qquad b_1(t)\psi_1(t) = -1, \; t \in [T_1, T_2],$$

де $[T_1, T_2] \subset [t_0, t_1]$.

Можна показати [2], що в силу невиродженої оптимізаційної задачі та лінійності системі (1), випадок (8) має місце лише для скінченого числа $t \in [t_0, t_1]$.

Для подібних за структурою, але стаціонарних, динамічних систем в [3] при розгляді задачі мінімізації витрати палива була встановлена структурна властивість оптимальних процесів, що зветься послідовною оптимальністю і яка полягає в однаковості оптимального управління на відповідних інтервалах часу для повної та скороченої систем. Під останньою розуміється динамічна система, що створюється з вихідної системи (1) вилученням (відкиданням) останнього рівняння динаміки.

Доведемо, що таку ж саме властивість мають і процеси при оптимізації за критерієм (3) і для нестаціонарних систем виду (1).

Одночасно з динамічної системою (1) будемо розглядати систему, що скорочена на порядок порівнянно з вихідної, і описується рівнянням

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t)\bar{u}(t), \tag{9}$$

де $\bar{x}$(t) = $[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n-1}(t)]$; *(n-1)* — вимірний вектор стану системи;

$$\bar{A}(t) = [a_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}(t)a_{22}(t) & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1n-2}(t)a_{n-1n-1}(t) & \end{bmatrix}; \quad (i,j = \overline{1, n-1}); \tag{10}$$

$\bar{b}_1$(t) = $[b_1(t), 0, 0, \ldots, 0]$, *(n-1)* — вимірний вектор стовпець.

Нехай на інтервалі $[t_0, \tau]$ існує допустиме управління, яке забезпечує спочатку екстремальні значення усім фазовим координатам системи (1), а потім здійснює її вільний рух, переводячи її з початкового стану $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ за час $[t_0, \tau]$ в положення

$$\bar{x}\ (\tau) = [x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots, x_n(\tau)].$$

Крім того вважається, що на інтервалі $[\tau, t_1]$ також існує допустиме управління $u^*(t)$, яке здійснює перевід, мінімізуючи критерій витрати палива (3), скорочену систему (9) зі стану $\tilde{x}(\tau) = [x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots, x_{n-1}(\tau)]$ в кінцеве положення, що визначається термінальними рівновагими, зокрема нульовими, значеннями змінних $\tilde{x}(t_1) = \tilde{x}^1 = [x_1(t_1), x_2(t_1), \ldots, x_{n-1}(t_1)] = [0, 0, \ldots, 0]$.

Суттєвим є те, що при такому характері руху фазова координата $x_n(t)$ вихідної системи (1) змінює свої значення з $x_n(\tau)$ до кінцевого рівноваговогo $x_n(t_1) = x_n^1$=0, а фазова траєкторія $\bar{x}(t)$ і управління $u^*(t)$ повної системи на всьому інтервалі $[t_0, t_1]$ є послідовно оптимальні та задовольняють принципу максимума [1,2]. Таким чином, вище отримані результати дозволяють стверджувати, що для даного класу нестаціонарних систем управління, як і для подібних стаціонарних систем, має місце відповідна структурна властивість оптимальних за витратами палива процесів управління.

Тоді з встановленої структурної властивості витікає, що оптимальне за витратою палива управління системами виду (1) може здійснюватися за допомогою оптимального управління скороченою на порядок системою виду (9). При цьому на першому етапі завдання(уставка), що подається на вхід оптимального регулятора для скороченої системи, повинне відповідати спочатку руху системи до екстремального значення однієї з фазових координат, а потім забезпечувати вільний траєкторний рух системи.

На другому етапі оптимального управління уставка регулятору змінюється з метою переводу скороченої системи (9) з мінімізацією витрати палива в задане значення по (n-1)-ій координаті, що відповідає рівноваговому стану системи. Застосовуючи цей підхід до об’єктів (n-1)-го, (n-2)-го, (n-3)-го… і т. д. порядків, приходимо до сукупності оптимальних траєкторій, що характеризуються моментами $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_{n-1}$ зміни завдань (уставок) оптимальному регулятору скороченої системи. При цьому структурна схема оптимального за витратою палива регулятора для лінійної нестаціонарної системи *n*-го порядку, яка побудована на основі вище викладеного правила послідовного скорочення порядку об’єкту і принципу прогнозування, подана на рис. 1 і виглядає наступним чином:

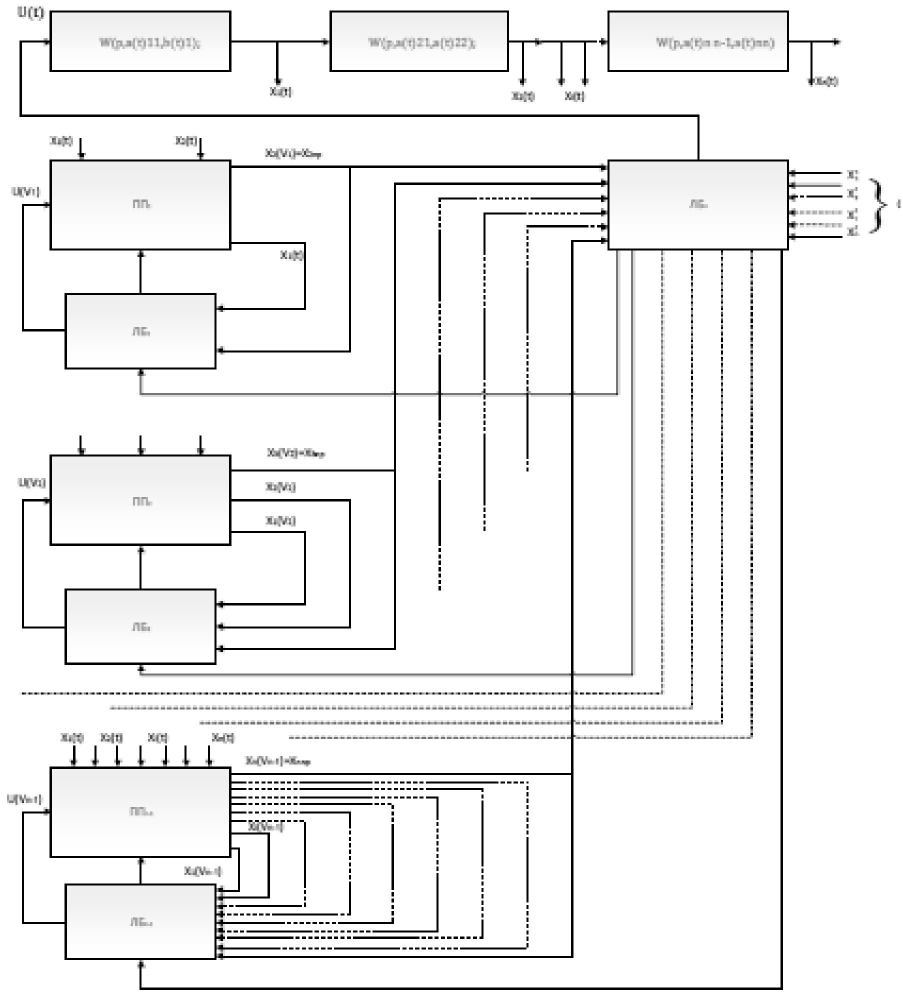

Рис. 1 — Структурна схема системи оптимального керування

1. До складу оптимального регулятора входить сукупність з (n-1)-х прогнозуючих пристроїв $ПП_1, ПП_2, \ldots ПП_{n-1}$, які працюють у прискореному темпі з періодизацією рішень разом з відповідними логічними блоками $ЛБ_1; ЛБ_2, \ldots, ЛБ_{n-1}$

2. Система з (n-1) –х прогнозуючих пристроїв $ПП_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ дозволяє періодично отримувати, так звані, прогнозовані значення фазових координат, починаючи з координати $x_2(t)$, як і відповідають оптимальному за витратою палива руху скороченого на відповідне число порядків об'єкту з поточного стану до заданого рівноважового стану;

3. Логічні блоки $ЛБ_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ призначені для формування оптимальних керуючи впливів для системи прогнозуючих пристроїв $ПП_i$ $(i = \overline{1, n-1})$,що забезпечує їх оптимальний за витратою палива траєкторний рух, який складається

з (n-1)-ої послідовності траєкторних ділянок типу «розгін-вільний рух-гальмування», на основі відпрацьовування відповідних значень уставок, що формуються для них логічним блоком $ЛБ_n$, який крім того здійснює перевірку виконання прогнозуючими пристроями $ПП_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ заданих граничних умов і синтезує оптимальні керуючи впливи, що подаються на об'єкт.

Як відомо, реалізація будь-якого автоматичного регулятора, і оптимального за витратою палива зокрема, вимагає знання поточних значень параметрів об'єкту керування. Оскільки для нестаціонарних систем характер зміни параметрів апріорі невідомий, то при оптимізації їх управління слід вирішувати задачі параметричної ідентифікації та відповідного налаштування оптимального регулятора. При використанні прогнозованого управління це стає можливим здійснити на основі метода слідкуючої моделі с градієнтною процедурою налагоджування як її самої, так і створеного оптимального регулятора [4, 5].

Для вирішення задачі синтезу адаптивного оптимального регулятора використовуємо операторну форму подання математичної моделі нестаціонарної системи виду (1), яка, по суті, включає в себе як об'єкт керування, так і незмінну частину оптимального регулятора:

$$x_n(t) = W(p, \bar{a}_{ij})u(t), \ (i, j = \overline{1, n}) \quad (11)$$

де $p = \frac{d}{dt}$; $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ij}(\vartheta)$, при $\forall \vartheta = t \in [t_0, t_1]$; (12)

$W(p, \bar{a}_{ij}) = \prod_1^n W_i(p, \bar{a}_{ij})$ — «квазістаціонарний» оператор динамічної системи (1) при визначені його параметрів миттєвими значеннями функцій $a_{ij}(t)$ згідно до (12).

Припускаючи, що координати $x_i(t), \ t \in [t_0, t_1]$ об'єкту доступні для спостереження та вимірювання, обираємо як критерій якості параметричної ідентифікації функціонал виду

$$J_i(t) = \{(\varepsilon_i^2(t) + q_i \varepsilon_i^2(t)\} = \min, \quad (13)$$

де $\varepsilon_i(t) = x_i(t) - x_i^{м}(t)$;

$x_i^{м}(t)$ — фазові координати слідкуючої моделі, $i = [\overline{1, n}]$;

що забезпечує досить високу швидкодію та неколивальний характер процесу параметричного самоналагоджування. Якщо тепер подати величини $\varepsilon_i(t)$ як

$$\varepsilon_i(t) = \{\prod_{k=1}^i W_k(p, \bar{a}_{kk-1}, \bar{a}_{kk}) - \prod_{k=1}^i W_k^{м}(p, \bar{a}_{kk-1}^{м}, \bar{a}_{kk}^{м})\}u(t), \quad (14)$$

де $W_k^{м}(p, \bar{a}_{kk-1}^{м}, \bar{a}_{kk}^{м})$ — оператор самоналагоджуючої моделі оптимального регулятора;

то це дозволить отримати компоненти градієнту показника якості (13) по параметрам, що налагоджуються, і у підсумку визначити алгоритм контуру самоналагоджування у такому вигляді:

$$\nabla J_i = \lambda_i\{(1 + q_i p)\varepsilon_i(t)\left[(1 + q_i p)\sum_{j=i-1}^i \frac{\partial \prod_{k=1}^i W_k^{м}}{\partial \bar{a}_{ij}}(p, \bar{a}_{kk-1}^{м}, \bar{a}_{kk}^{м})\right]\}u(t), \quad (15)$$

де $(1 + q_i p)\sum_{j=i-1}^i \frac{\partial \prod_{k=1}^i W_k^{м}}{\partial \bar{a}_{ij}}$ — допоміжний оператор;

λ_i — коефіцієнт підсилення (пропорційності) контуру самоналагоджування.

Враховуючи, що управління *u(t)* приймає значення *u*={+1,0,-1} вираз (15) спрощується та записується так:

$$\nabla J_i = \lambda_i \{(1 + q_i p)\varepsilon_i(t) \sum_{j=i-1}^{i} \frac{\partial \prod_{k=1}^{i} W_k^m}{\partial a_{ij}} (p, a_{kk-1}^m, a_{kk}^m) \tag{16}$$

Суттєве спрощення структури адаптивного регулятора досягається при використанні сигналів системи, еквівалентних у інформаційному сенсі сигналам допоміжного оператора. В цьому випадку вираз (16) трансформується до виду

$$\nabla J_i = \lambda_i \{(1 + q_i p)\varepsilon_i(t) sign\{u(t)\}, \tag{17}$$

Висновки

Аналіз оптимальних за витратою палива процесів в нестаціонарних системах n-го порядку дав можливість визначити їх послідовну оптимальність, що дозволило при вирішенні задачі синтезу оптимального управління використати принцип прогнозування [4]. Для параметричної ідентифікації нестаціонарних об'єктів при оптимізації їх за витратою палива були використані контури самоналагоджування, синтезовані на основі метода допоміжного оператора [5]. Головною перевагою запропонованого алгоритму адаптації є відсутність пошукових коливань і висока збіжність процесу самоналагоджування.

Список використаних джерел

1. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз. — М.,1969.

2. Атанс М.,Фалб Г.Л. Оптимальное управление. Из-во «Машиностроение» дозволив.,1968.

3. Зеленський. К.Х., Ігнатенко В.М., Стенін О.А. Структурна властивість оптимальних за витратами палива процесів управління в динамічних системах. Сб. «Адаптивні системи автоматичного управління». — К., 2017.

4. Игнатенко В.Н.,Шпит С.В.,Синеглазов В.М.,Толокняненко В.А. Адаптивная оптимизация в системах n-ого порядка с переменными параметрами. Сб. «Адаптивные системы автоматического управления». Вып. 3. Техніка. — К.,1975.

5. Костюк В.И. Беспоисковые градиентные самонастраивающиеся системы, Изд-во «Техника». — К.,1969.