

УДК 621.315.

В.М. Болховітін

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОХОЛОДЖЕННЯ РОЗПЛАВІВ ПОЛІМЕРІВ

На підставі огляду стану проблеми, пов'язаної із якісним і надійним ізоляційним покриттям кабелів надвисокої напруги сформульовано постановку задачі процесу охолодження розплаву полімерної суміші у зоні дозування в одношнековому екструдері, що є визначальною з точки зору забезпечення якісного ізоляційного покриття. Течія у зоні дозування розглядається як тришарова із різними реологічними характеристиками. Запропоновано ітераційний числово-аналітичний метод розв'язання відповідної крайової задачі, що ґрунтується на використанні скінченних інтегральних перетворень у просторовій та часовій областях. Розроблено відповідні алгоритми реалізації запропонованого методу.

Ключові слова: екструдер, математична модель, числово-аналітичний метод, рівняння Нав'є-- Стокса, інтегральні перетворення, полімер, функції Бесселя, шнек.

Вступ. Екструзія полімеру при накладанні ізоляції на жилу, що проводить, являє собою багатоетапний складний фізико-хімічний процес. Він містить у собі плавлення термопластичного матеріалу в екструдері, пересування розплаву полімеру, що має властивості аномально-в'язкої рідини, по каналу шнеку, що обертається, у формуючий інструмент екструдера і накладання розплаву полімеру на мідний провідник у кабельній головці пресу.

Зона дозування екструдера, де здійснюється гомогенізація розплаву полімеру та підвищення тиску для подальшого формування, є однією із визначальних зон пластикуючого екструдера. У цій зоні найчастіше виникають суттєві перегреви матеріалу, що негативно впливають на якість готового виробу.

Об'єктом моделювання є екструдер із каналом охолодження (рис. 1), в якому течуть різнорідні матеріали.

Математичне моделювання процесу тепломасоперенесення розплаву полімеру у каналі, що розглядається, як завжди, ґрунтується на законах збереження енергії, кількості руху та маси.

Огляд стану проблеми

Проблемі, що розглядається, присвячено значну кількість досліджень [1–8]. У більшості цих праць формулюються математичні моделі процесів дозування в екструдерах у вигляді системи рівнянь Нав'є–Стокса, але при формулюванні початкових і межових умов не враховуються: початкові умови відносно температурного поля розплаву полімеру, швидкості руху розплаву та межових умов, що

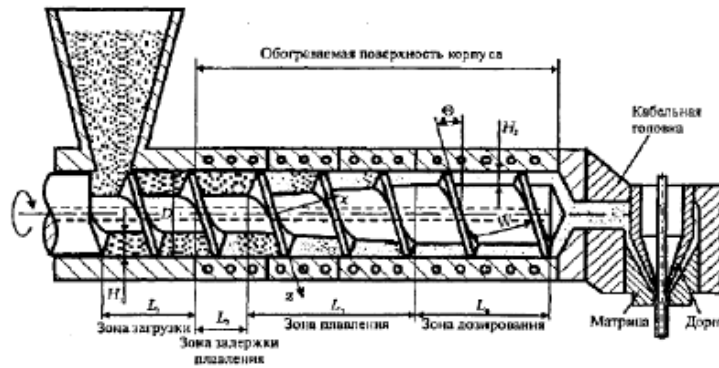


Рис. 1 – Схема одношнекового екструдера із кабельною головою

відображають вплив каналів, що охолоджують. Далі розв'язання сформульованої задачі здійснюється за двома напрямками: із застосуванням різницьових схем (тобто чисельними методами) [4–8]; при цьому наводяться результати такого моделювання у вигляді одновимірних графіків, хоча у загальній постановці має вирішуватися тривимірна нестационарна задача; із застосуванням відомого пакету ANSYS [1–3]. Такі підходи, навіть у разі отримання просторових розв'язань, не надають можливості створити систему автоматичного чи автоматизованого керування процесом охолодження розплаву полімеру до необхідної температури з метою забезпечення якісного покриття кабелів.

Постановка задачі

Розглянемо тришарову течію рідини із аномально-в'язкими властивостями. Задача ускладнюється взаємодією кількох потоків матеріалів із різними фізико-реологічними властивостями. Течія, що розглядається, є частина процесу екструзійного нанесення полімерної тришарової ізоляції, що значною мірою визначає якісні характеристики готової кабельної продукції. На рис. 2 наведено канали витоку полімерів у циліндричній системі координат [14].

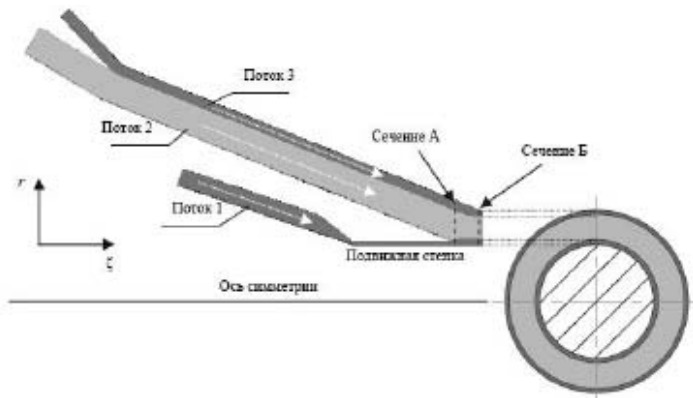


Рис. 2 – Канали витоку полімерів у циліндричній системі координат

Для спрощення задачі зробимо низку припущень: середовище не стискається; масові сили значно менші за поверхневі; течія є осесиметрична; на межі каналу реалізуються умови прилипання та непроникненості; теплофізичні характеристики сталі.

У результаті формування розплаву полімера у зоні плавлення в екструдері розплав підходить у зону дозування із швидкістю потоку розплаву $v_\zeta = const$ за нульових компонент v_r, v_θ

За таких припущень система диференціальних рівнянь для кожного із шарів потоку відносно швидкості має такий вигляд:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho \left(v_\zeta \frac{\partial v_r}{\partial \zeta} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{r\zeta}}{\partial \zeta}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \rho \left(v_\zeta \frac{\partial v_\theta}{\partial \zeta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta\zeta}}{\partial \zeta}; \quad (21)$$

$$\frac{\partial v_\zeta}{\partial t} + \rho \left(v_\zeta \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} \right) = -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{r\zeta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\zeta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\zeta\zeta}}{\partial \zeta}; \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \rho^k C^k \left(v_\zeta \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda^k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda^k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda^k \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) + \Phi, \quad (23)$$

де k – визначає номер шару у потоці і відповідний йому матеріал; r, θ, ζ – радіальна, окружна (азимутальна) і поздовжня циліндричні координати; Φ – дисипативне джерело тепла; P – тиск; T – температура; ρ – густина; C – тепломісткість; λ – теплопровідність; μ_e – ефективна в'язкість, що є функція швидкості зсуву і температури:

$$\mu_e = \mu_0 e^{-\beta(T-T_0)} (I_2 / 2)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (24)$$

де μ_0 – початкова в'язкість за $T = T_0$; β – температурний коефіцієнт в'язкості; n – коефіцієнт аномалії в'язкості; I_2 – другий інваріант тензору швидкостей деформації.

$$\Phi = \mu_e^k (I_2 / 2).$$

Компоненти тензору напружень:

$$\tau_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \tau_{\theta\theta} = 2\mu_e \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right); \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu_e \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right];$$

$$\tau_{r\zeta} = \tau_{\zeta r} = \mu_e \left(\frac{\partial v_r}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_\zeta}{\partial r} \right); \quad \tau_{\theta\zeta} = \tau_{\zeta\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\zeta}{\partial \theta} \right); \quad \tau_{\zeta\zeta} = 2\mu_e \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta}.$$

Функція дисипації визначається через реологічні співвідношення:

$$\Phi = \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \tau_{\zeta\zeta} \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} + \tau_{r\theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] + \tau_{r\zeta} \left(\frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \tau_{\theta\zeta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\zeta}{\partial \theta} \right) = \mu_e \frac{1}{2} I_2, \quad (25)$$

Другий інваріант тензору напружень I_2 має вигляд

$$\frac{I_2}{2} = 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\zeta}{\partial \theta} \right)^2.$$

Система рівнянь (1) – (4) замикається межовими умовами:

- на нерухомих стінках компоненти швидкості дорівнюють нулю;
- на межі контакту із рухомою жилою поздовжня компонента швидкості дорівнює швидкості руху жили (0, 193 м/с);
- на вході у канали задано тиски;
- на виході – межові умови другого роду за швидкістю і температурою;
- температура розплавів полімерів на виході із екструдерів – 423 К;
- температура рухомої жили 383 К.

На межах розділу потоків задаються такі межові умови:

- за швидкостями:

$$v_r|_1 = v_r|_2; \quad v_\zeta|_1 = v_\zeta|_2; \quad v_r|_2 = v_r|_3; \quad v_\zeta|_2 = v_\zeta|_3, \quad (26)$$

- за потоками тепла:

$$q_r|_1 = q_r|_2; \quad q_\zeta|_1 = q_\zeta|_2; \quad q_r|_2 = q_r|_3; \quad q_\zeta|_2 = q_\zeta|_3, \quad (27)$$

- за температурою на межах розділу потоків:

$$T|_1 = T|_2; \quad T|_2 = T|_3, \quad (28)$$

де індекси 1,2,3 – номери потоків течії (рис.); q_r, q_ζ – потоки тепла у напрямку відповідних осей; Крайова задача (1) – (9) доповнюється співвідношеннями властивостей матеріалів, що переробляються (табл. 1).

Таблиця 1 – Фізико-реологічні властивості матеріалів

Матеріал	$\mu_0 _{T=433K}$	β (1/К)	n	ρ	λ	C
Ізоляція (шар 2)	14946	0,0168	0,542	779	0,182	2500
Екран(шари 1,2)	38523	0,0027	0,251	1080	0,182	2500

Вирішення проблеми

Вирішення задачі по визначенню впливу охолодження шнеку на процес екструзії може бути здійснено на ґрунті математичної моделі, що описує процеси тепломасоперенесення розплавів полімеру ті охолоджуючого агенту із різними реологічними і теплофізичними властивостями у каналах шнеку.

Математичний опис процесів течії і теплообміну розплаву полімеру та рідини, що охолоджує, ґрунтується на законах збереження. Рівняння енергії, руху, нерозривності отримано за таких припущень [3]:

- середовище не стискається, без пружних властивостей;
- полімер надходить у канал із торця шнеку у рідинному стані;
- течія осесиметрична;
- теплофізичні характеристики є сталі;
- полімер рухається вздовж шнека;
- поверхня шнека без гребенів.

Система диференціальних рівнянь для кожного із потоків набуває вигляду:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r^i}{\partial r} + \frac{\partial v_z^i}{\partial z} = 0; \quad (29)$$

$$\frac{\partial v_r^j}{\partial t} + \rho \left(v_z^j \frac{\partial v_r^j}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(2\mu_e^j \frac{\partial v_r^j}{\partial r} \right) + \frac{2\mu_e^j}{r} \frac{\partial v_r^j}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \mu_e^j v_r^j + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_e^j \left(\frac{\partial v_z^j}{\partial r} + \frac{\partial v_r^j}{\partial z} \right) \right]; \quad (30)$$

$$\frac{\partial v_z^j}{\partial t} + \rho \left(v_z^j \frac{\partial v_z^j}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_e^j \left(\frac{\partial v_z^j}{\partial r} + \frac{\partial v_r^j}{\partial z} \right) \right] + \frac{\mu_e^j}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z^j}{\partial r} + \frac{\partial v_r^j}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e^j \frac{\partial v_z^j}{\partial z} \right); \quad (31)$$

$$\rho^i C^i \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_z^i \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda^i \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda^i \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi; \quad (32)$$

де індекс i визначає матеріал; r, z – радіальна і поздовжня циліндричні координати; v_r, v_z – компоненти вектору швидкості; ρ – густина; C – теплоємність; μ_e – ефективна в'язкість; λ – теплопровідність, що є функція швидкості зсуву і температури:

$$\mu_e = \mu_0 e^{-\beta((T-T_0))} (I_2 / 2)^{(n-1)/2}, \quad (33)$$

де μ_0 – початкова в'язкість за T_0 , β – температурний коефіцієнт в'язкості; I_2 – другий інваріант тензору швидкостей деформації.

Система рівнянь (10)–(13) замикається такими межовими умовами:

- на нерухомих стінках компоненти швидкості дорівнюють нулю;
- на вході у канали задаються епюри швидкостей, що відповідають заданим витратам матеріалу;
- на виході – межові умови другого роду за швидкістю і температурою;
- температура стінки циліндру зростає за градієнтом від $90^\circ C$ до $200^\circ C$;
- температура полімерів на вході в екструдер стала – $20^\circ C$;

– на поверхнях контакту задаються межові умови 4-го роду і рівність температур.

Полімер:

$$v_z|_{z=0} = f_1(r), \quad v_r|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z}|_{z=L_{\text{oi}}} = 0, \quad v_z|_{r=R_{\text{oi}}} = v_r|_{r=R_{\text{oi}}} = 0, \quad (34)$$

$$v_r|_{r=R_c} = 0, \quad v_z|_{r=R_c} = 0, \quad \lambda_p \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R_{\text{oi}}} = \lambda_m \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R_{\text{oi}}}, \quad (35)$$

$$T^+|_{r=R_{\text{oi}}} = T^-|_{r=R_{\text{oi}}}, \quad (36)$$

$$T|_{z=0} = T_{\text{âð}}, \quad T|_{r=R_c} = f(z), \quad \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=L_{\text{oi}}} = 0, \quad (37)$$

Шнек (метал):

$$\frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=L_{\text{oi}}} = 0. \quad (38)$$

Канал охолодження:

$$v_z|_{z=0} = f_2(r), \quad \frac{\partial v_r}{\partial r}|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r}|_{r=0} = 0. \quad (39)$$

Межові умови на твердих поверхнях для компонент швидкості агенту, що охолоджує, відповідають умовам прилипання і непроникнення.

У центрі каналу охолодження виконуються умови (20):

$$\lambda_{\text{ið}} \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R_k} = \lambda_m \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R_k}, \quad (40)$$

$$T^+|_{r=R_k} = T^-|_{r=R_k}, \quad T|_{z=0} = T_{\text{âð}}, \quad \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=L_{\text{oi}}} = 0. \quad (41)$$

У якості агенту охолодження використовується вода із $T = 10^\circ \text{C}$. Тиск агенту $P = 1000$ Па. Вода подається по центру. На рис. 3, [3], наведено залежність температур у полімері за різної глибини введення агенту, що охолоджує. На рис. позначено: 1 – без охолодження; 2 – глибина введення 10%; 3 – 30%; 4 – 50%; 5 – 70%; 6 – 90%. Зауважимо, що ці результати автори [3] отримали, як впливає із представлених графіків, без урахування наведеної вище системи диференціальних рівнянь із межовими умовами, за допомогою пакету ANSYS.

У результаті введення агенту на глибину від 50 до 90% вдається знизити перегрів полімеру (температура знижується на 20°C) і вирівняти температуру у каналі при збереженні заданих технологічних параметрів.

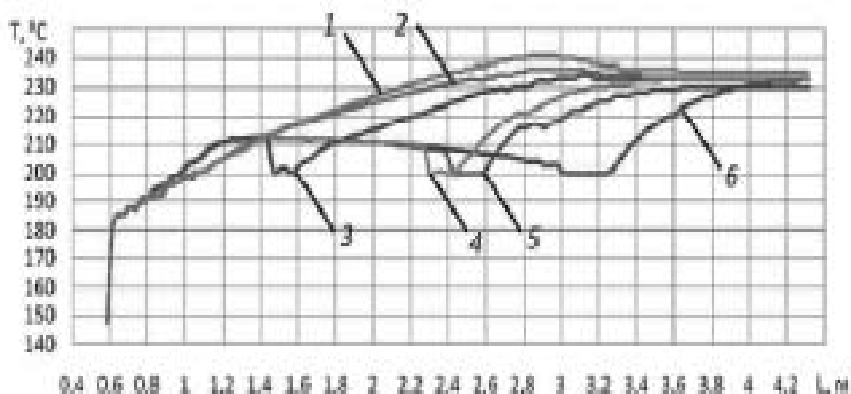


Рис. 3 – Розподіл максимальної температури у полімері

Розв'язання задачі

Математичне моделювання виконується ітераційним числово-аналітичним методом із застосуванням інтегральних перетворень за просторовими і часовими змінними, [9–11].

Запишемо систему рівнянь при $\rho = const$, у "стандартизованому" вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \Phi \right) + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\Gamma_\Phi}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] + S_\Phi = \frac{\Gamma_\Phi}{\rho} \Delta \Phi + S_\Phi; \end{aligned} \quad (42)$$

де $\Phi = [v_r, v_\theta, v_z, T]$, $\Gamma = [\mu_{ef}, \mu_{ef}, \lambda_t / c_v]$.

Позначимо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Delta \Phi - N_\Phi. \quad (43)$$

Тоді

$$N_\Phi = v_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \Phi \right) + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} - S_\Phi. \quad (44)$$

Розглядаються межові умови для полого циліндру радіусу $R_1 \leq r \leq R_2$.

Знайдемо інтегральні перетворення від Лапласіану для осесиметричного випадку.

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (45)$$

Межові умови за змінною z приймаємо змішаними, тобто

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \beta_\Phi \Phi \right]_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \beta_\Phi \Phi \right]_{z=L} = 0.$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (46)$$

Задача про розподіл температури полімерної маси у циліндричному каналі $R_0 \leq r \leq R_1$ описується рівнянням

$$c_V \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + A q_r. \quad (47)$$

Початкова умова для T :

$$T(r, \theta, t) |_{t=0} = f(r, \theta) = \cos k \theta. \quad (48)$$

Межові умови:

$$T(r, \theta, t) |_{r=R_0} = q_k / \lambda_k, \quad \left[\alpha_0 \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_1 T \right] |_{r=R_1} = 0. \quad (49)$$

Друга межова умова означає наявність теплового потоку із вільної поверхні.

Застосуємо до рівняння (23) інтегральне перетворення за змінною θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$. За умови періодичності взаємно ортогональними лінійно-незалежними нормованими розв'язками задачі

$$\frac{d^2 \bar{K}}{d\theta^2} + \mu^2 \bar{K} = 0$$

є функції

$$\bar{K}_{2m-1}(\theta) = \frac{1}{\pi} \sin m\theta, \quad \bar{K}_{2m}(\theta) = \frac{1}{\pi} \cos m\theta. \quad (50)$$

Тоді

$$\bar{T}(r, \mu, t) = \int_0^{2\pi} T(r, \theta, t) \bar{K}_\gamma(\theta) d\theta, \quad \gamma = 2m - 1, \quad \gamma = 2m. \quad (51)$$

Рівняння (28) у лінійному наближенні (без урахування конвективних складових) набуває вигляд:

$$c_V \rho \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \bar{T} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) + A \bar{q}_\mu. \quad (52)$$

Інтегральне перетворення цього рівняння відносно змінної r дає ядро перетворення $H(\beta r)$, що має задовольняти рівняння Бесселя із межовими умовами

$$\bar{T}(r, \mu, t) |_{r=R_0} = 0, \quad \left[\alpha_0 \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \alpha_1 T \right] |_{r=R_1} = 0. \quad (53)$$

$$Y(\beta r) = J_m(\beta R_1)I_m(\beta r) - I_m(\beta R_1)J_m(\beta r). \quad (54)$$

Власні значення $\beta_{m,k}$ визначаються як розв'язок характеристичного рівняння

$$g(\beta) = \alpha_0\beta[J_m(\beta R_0)\frac{d}{dr}I_m(\beta R_1) - I_m(\beta R_0)\frac{d}{dr}J_m(\beta R_1)] + \alpha_1J_m(\beta R_0)I_m(\beta R_1) - I_m(\beta R_0)J_m(\beta R_1) = 0. \quad (55)$$

$I_m(\beta r)$ – функції Бесселя другого роду (модифіковані функції Бесселя).

Позначимо

$$B(m, n) = J_m(\beta a)I_n(\beta b) - I_m(\beta a)J_n(\beta b); \quad a = R_0, \quad b = R_1.$$

Тоді

$$g(\beta) = \left(\frac{m}{R_1}\alpha_0 + \alpha_1 \right) B(m, m) - \alpha_0\beta B(m, m+1) = 0. \quad (56)$$

Згідно із загальним алгоритмом обчислення коренів рівняння (36) або (37) маємо:

$$\frac{dg(\beta)}{d\beta} = \frac{m}{\beta} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) B(m, m) - B(m+1, m) - \alpha_0 \left[m \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) B(m, m+1) - \beta(B(m+1, m+1) + B(m, m+2)) \right]. \quad (57)$$

Розв'язання цього рівняння дає власні значення $\beta_{m,k}$.

Застосування інтегрального перетворення за змінною z до рівняння

$$c_V \rho \frac{\partial \overline{\overline{T}}(\beta_{m,k}, z, t)}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 \overline{\overline{T}}(\beta_{m,k}, z, t)}{\partial z^2} + \overline{\overline{q}}_w$$

із межовими умовами призводить до звичайного диференціального рівняння відносно t . Власні функції за змінною z мають вигляд

$$Z_j(z, \delta) = \frac{1}{\|Z(z, \delta_j)\|^2} \left(\cos(\delta_j z) + \frac{\delta_j}{\beta_T} \sin \delta_j z \right).$$

$$\frac{d \overline{\overline{T}}}{dt} = \lambda_T \overline{\overline{T}} + \overline{\overline{q}}_w + R_T.$$

$$\overline{\overline{T}} = \int_0^L \int_{R_0}^{R_1} \overline{\overline{T}}(r, z, \mu, t) Z_j(z, \delta_j) Y_m(\beta_{m,k} r) dr dz.$$

Як наслідок застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними r, z отримуємо звичайне диференціальне рівняння відносно $\overline{\overline{T}}^{(0)}(t, \beta, \delta)$, де α, β – власні значення, що відповідають власним функціям $Y_0(r, \beta), Z_j(z, \delta)$.

$$\frac{\overline{\overline{\overline{d T^{(0)}}}}(t, \beta_{km}, \delta_j)}{dt} = -\gamma_{km}^T \overline{\overline{\overline{T}}}(t, \beta_{km}, \delta_j) + \overline{\overline{\overline{R}}}_T. \quad (58)$$

$$\overline{\overline{\overline{T^{(0)}}}}(t, \beta, \delta) = \int_{R_1}^{R_2} Y_0(\beta_{mk} r) r dr \int_0^L Z_j(\delta_j z) T^{(0)}(r, z, \theta, t) dz. \quad (59)$$

$$\gamma_{k,m,j} = \lambda_T / (\rho c_v) (\beta_{km}^2 + \delta_j^2).$$

Функція R_T визначається інтегральним перетворенням межових умов.

Власні функції отримано у такому вигляді.

$$Z_j(z, \delta) = \frac{1}{\|Z(z, \delta_j)\|^2} \left(\cos(\delta_j z) + \frac{\delta_j}{\beta_T} \sin(\delta_j z) \right). \quad (60)$$

Власні значення δ_j визначаються розв'язанням характеристичного рівняння

$$Z(\delta L) = \cos(\delta L) + \frac{\delta}{\beta_T} \sin(\delta L) = 0.$$

Розв'язок рівняння відносно температурного поля у нульовому наближенні набуває вигляду:

$$T^{(0)}(r, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N [Y_0(\alpha_{km} r) Z_k(\delta_k z) \left[e^{-\gamma_{km}^T t} + \overline{\overline{\overline{R}}}_T (1 - e^{-\gamma_{km}^T t}) \right]]. \quad (61)$$

Тепер отримуємо вирази для похідних від тиску.

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} = \rho R \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{dY_0(\beta_{ij} r)}{dr} Z_j(\delta_j z) e^{-\gamma_{ij} t}. \quad (62)$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} = \rho R \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N Y_0(\beta_{ij} r) \frac{dZ_j(\delta_j z)}{dz} e^{-\gamma_{ij} t}. \quad (63)$$

Застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними до (43), (44) дає:

$$\frac{\partial \overline{\overline{\overline{p^{(0)}}}}}{\partial r} = \rho R \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N y r_m z r_k e^{-\gamma_{km} t}; \quad (64)$$

$$\frac{\partial \overline{\overline{\overline{p^{(0)}}}}}{\partial z} = \rho R \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N y z_m z z_k e^{-\gamma_{km} t}; \quad (65)$$

$$y r_{m,i} = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_{R_1}^{R_2} Y_m(\alpha r) \frac{d}{dr} (Y_i \alpha r) r dr; \quad y z_{m,i} = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_{R_1}^{R_2} Y_m(\alpha r) Y_i(\alpha r) r dr; \quad (66)$$

Алгоритм обчислення інтегралів типу (47) приведено в [12].

Тепер, за наявними виразами для похідних від тиску у рівняннях відносно компонент швидкості полімерної маси можна отримати розв'язок у лінійному наближенні для v_r і v_z . Оскільки область розв'язання задачі та межові умови відносно компонент швидкості збігаються із межовими умовами відносно T , інтегральні перетворення за просторовими змінними, що застосовуються до рівняння (23) при $\Phi = v_r$ і аналогічно при $\Phi = v_z$, призводять до рівняння

$$\frac{dV_r^{(0)}(t, \alpha, \delta)}{dt} = -\gamma_{m,k}^{v_r} V_r(t, \alpha, \delta) + R_{v_r} + \frac{\partial \overline{p^{(0)}}}{\partial r}.$$

де $\gamma_{m,k}^{v_r} = \frac{\mu_{ef}}{\rho} (\alpha_m^2 + \delta_k^2)$.

$$V_r^{(0)}(t, \alpha, \delta) = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \frac{1}{\|Z_k\|^2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^L Y_m(\alpha r) Z_k(\delta z) v_r(r, z, t) r dr dz.$$

У просторі оригіналів маємо такий вираз:

$$v_r^{(0)}(r, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N Y_0(\alpha_{km} r) Z_k(\delta_k z) \left[R_{mk}^{u_0} e^{-\gamma_{km}^{v_r} t} + \left(\bar{v}_r + \frac{\partial \overline{p^{(0)}}}{\partial r} \right) + R_{mk}^u (1 - e^{-\gamma_{km}^{u_r} t}) \right]. \quad (67)$$

За аналогічним алгоритмом отримуємо розв'язок у лінійному наближенні для $v_z^{(0)}(r, z, t)$:

$$v_z^{(0)}(r, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N Y_0(\alpha_{km} r) Z_k(\delta_k z) \left[R_{mk}^{v_0} e^{-\gamma_{km}^{v_z} t} + \left(\bar{v}_z + \frac{\partial \overline{p^{(0)}}}{\partial z} \right) + R_{mk}^v (1 - e^{-\gamma_{km}^{v_z} t}) \right]. \quad (68)$$

Із урахуванням отриманих виразів для компонент швидкості та температури у лінійному наближенні маємо:

$$u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^M Y_m(\alpha_{mk} r) Z_k(\delta_k z) R_{v_r}^{km} (1 - e^{-\gamma_{km}^{u_r} t}) \sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{dY_n(\alpha_{nj} r)}{dr} Z_j(\delta_j z) R_{v_r}^{nj} (1 - e^{-\gamma_{nj}^{u_r} t}). \quad (69)$$

Тепер до цього виразу можна застосувати інтегральні перетворення за просторовими змінними r і z .

Інтегральне перетворення за змінною r , що застосовується до (50), призводить до необхідності обчислення інтегралів вигляду

$$\int_{r_2}^{r_1} Y_m(\alpha_{mk} r) Y_{l_1}(\alpha_{l_1 j_1} r) dY_{l_2}(\alpha_{l_2 j_2} r) r dr.$$

Оскільки для добутку функцій Бесселя (крім обчислення норми, тобто від квадратів функцій Бесселя) не існує виразів, що є інтеграли від добутку двох функцій

Бесселя різного порядку та різних власних значень, тим паче від добутку трьох і більше функцій Бесселя), необхідно розробити алгоритми наближеного обчислення таких інтегралів. Класичний підхід, що ґрунтується на прямій підстановці функцій Бесселя у вигляді степеневих рядів відносно, наприклад, $\beta_{mk}r$ не призводить до результату внаслідок того, що спроба обмежити кількість членів у розкладанні у степеневий ряд для того, щоб відповідний алгоритм можна було б реалізувати, призводить до суттєвих похибок у результаті. Тому пропонується подати функції Бесселя у вигляді дробово-раціональних функцій, інтегрування яких зводиться до обчислення табличних інтегралів від дробово-раціональних функцій. Докладний алгоритм перетворення добутку функцій $Y_n(\alpha_{nk}r)Y_m(\alpha_{mk}r)dY_l(\alpha_{lj}r)$ у суму дробово-раціональних виразів другого степеню викладено у [12].

Інтегральні перетворення відносно змінної z зводяться до обчислення інтегралів від добутку власних функцій

$$Z = (\cos \delta_k z + \frac{\delta_k}{\beta_\Phi} \sin(\delta_k z))(\cos \delta_{j_1} z + \frac{\delta_{j_1}}{\beta_\Phi} \sin(\delta_{j_1} z))(\cos \delta_{j_2} z + \frac{\delta_{j_2}}{\beta_\Phi} \sin(\delta_{j_2} z)).$$

Інтеграли у межах $[0, L_z]$ від таких функцій не складають жодних проблем. Отже, інтегральні перетворення за просторовими змінними від конвективних складових у рівняннях руху (відносно компонент швидкості та температури)

$$\bar{Y}_{l_1 l_2}^m(\beta_m) \bar{Z}_{j_1 j_2}^k = \overline{\overline{v_r^{(0)} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} + v_z^{(0)} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial z}}}$$

На рис. 4 наведені результати моделювання отриманого розв'язку.

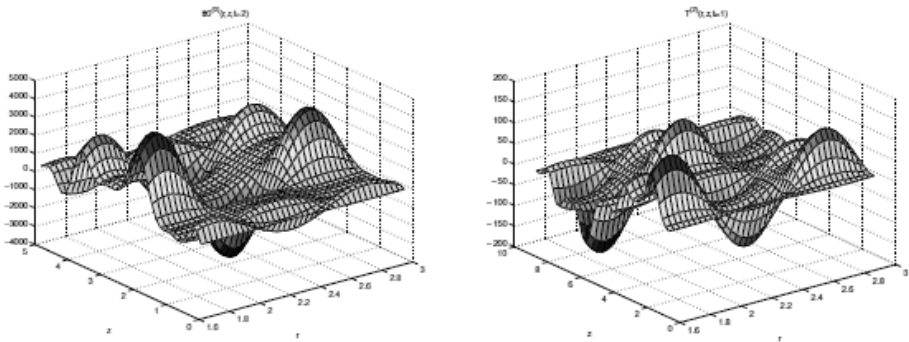


Рис. 4. – Температура полімеру: $t = 10$ с у другому наближенні та $t = 20$ с у другому наближенні

Висновки. Виконано огляд стану проблеми, пов'язаної із якісним і надійним ізоляційним покриттям кабелів надвисокої напруги. Сформульовано постановку задачі процесу охолодження розплаву полімерної суміші у зоні дозування в одношаровому екструдері.

Течія у зоні дозування розглядається як тришарова із різними реологічними характеристиками. Запропоновано ітераційний числово-аналітичний метод роз-

в'язання відповідної крайової задачі, що ґрунтується на використанні скінченних інтегральних перетворень у просторовій та часовій областях.

Список використаних джерел

1. Зиннатуллин Р. Р. Управление процессом охлаждения экструдированной полимерной изоляции при производстве электрических кабелей Автор. дис...канд.техн. наук, 2009, 17 с.

2. Митрошин В. Н. Математическое моделирование процесса охлаждения изолированной кабельной жилы при ее изготовлении на экструзионной линии как объекта управления с распределенными параметрами/В.Н. Митрошин, 2005. С. 122–128.

3. Шрагер Г. Р. Исследование режимов течения высоковязкой полимерной массы, ограниченной свободной поверхностью, в области резкого расширения канала./Г.Р. Шрагер, А.Н. Козлобородов //Прикладная механика и теоретическая физика, 2008, №1. – С. 81–89.

4. Казаков А.В. Моделирование процессов тепломассопереноса полимера в головке экструдера с учетом и без учета зависимости вязкости от температуры / А. В. Казаков, В. Г. Савченко, Н. М. Труфанова//Интеллектуальные системы в производстве. 2010. № 1 (15).

5. Митрошин В.Н. Структурное моделирование температурного поля расплава полимера в зоне дозирования одночервячного экструдера // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Технические науки. – 2006. – № 41. – С. 191–194.

6. Camesasca M., Manas-Zloczower I., Kaufman M. Influence of extruder geometry on laminar mixing: entropic analysis // Plastics, Rubbers and Composites. – 2004. – Vol. 33, № 9/10. – P. 372–376.

7. Леваничев В.В. Разработка модели движения расплава полимера в экструдере // Вост.-Европ. журнал передовых технологий. –2015. – Т. 5, № 5(77). – С. 7–13.

8. Ершов С. В. Численное исследование процессов течения расплава полимера в канале дозирования и формирующем инструменте/С.В. Ершов, Н.М. Труфанова, М.Д. Лукин//Вестник ПНИПУ, серия машиностроение, материаловедение – Т.19, № 3, 2017. – С. 163–178.

9. Болховітін В.М. Математичне моделювання температурних режимів полімерного покриття кабельних виробів/В.М. Болховітін, К.Х. Зеленський// Вісник Університету "Україна", серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика, №1 (18), 2017. – С. 50–55.

10. Таланчук П.М. Моделювання процесу ізоляційного покриття/П.М. Таланчук, В.М. Болховітін, К.Х. Зеленський//Вісник Університету "Україна", серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика, №1 (18), 2016. – С. 5–14.

11. Зеленський К. Х. Комп'ютерне моделювання повітряних сумішей у циклонних камерах./К.Х. Зеленський, В.М. Ігнатенко, К.С. Бовсуновська// Респ. міжв. сб. АСАУ, №1 (22), 2013, С. 120–134.

12. Зеленська Н. К. Апроксимація циліндричних функцій дробово–раціональними виразами/Н.К. Зеленська, К.Х. Зеленський//Вісник Університету «Україна», серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика, №1, 2016.