УДК 621.397

ФОРМУВАННЯ СИГНАЛІВ ВЕЙВЛЕТ – ПЕРЕТВОРЕННЯ З УРАХУВАННЯМ ПОРОГОВИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧІ СТИСНЕННЯ ЦИФРОВОГО ПОТОКУ

DOI 10.36994/2707-4110-2020-1-28-16

Солодка В. І., к.т.н., Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова ,
Одеса, Україна. valyaonas@gmail.com

Ошаровська О. В., к.т.н., доц., Одеська національна академія зв'язку ім. О.С.
Попова , Одеса, Україна. osharovskaya@gmail.com

Патласенко М. О., Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова , Одеса,
Україна. nick_msa@ukr.net

Подольська А. В., Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова , Одеса,
Україна. krasava66627@gmail.com

Анотація. У роботі була проаналізована проблема поліпшення якості цифрової фільтрації на основі одновимірного ДВП із застосуванням різних варіантів завдання порогової функції і вибору вейвлет-базису для зменшення цифрового потоку. З огляду на значний інтерес до даної проблеми і численні дослідження, пошук шляхів оптимізації придушення перешкод, присутніх в сигналах і зображеннях, продовжує залишатися актуальною і важливою. Для таких завдань, як стиснення зображень, операцій при обробці і синтезі різних сигналів, при аналізі зображень самої різної природи, при зменшенні (стисканні) великих обсягів інформації, та для захисту інформації досить часто використовується вейвлет перетворення, реалізоване на базі дзеркальних фільтрів.

Для формування сигналів вейвлет – перетворення з урахуванням порогових функцій в задачі стиснення цифрового потоку необхідно розглянуто стандартний підхід до вирішення завдання очищення сигналу від перешкод і випадкових спотворень, що застосовує вейвлети Добеши і коригування коефіцієнтів розкладання сигналу по базису вейвлет-функцій із застосуванням м'якого і жорсткого варіантів завдання порогового значення.

Показано, що використання комплексних базисів забезпечує перевагу як з точки зору помилки порогової фільтрації, так і з точки зору зниження ризику випадкових спотворень при реконструкції корисного сигналу по вейвлет-коефіцієнтами. Відповідні дії були зроблені для тестового сигналу і експериментальних даних. Застосування комплексного вейвлет-перетворення дозволило отримати зменшення помилки і зниження порогового рівня при коригуванні вейвлет-коефіцієнтів, та може бути рекомендовано для проведення аналізу методів комплексного вейвлет-перетворення в якості ефективного інструменту очищення від перешкод сигналів і зображень різної природи для наступних досліджень.

Ключові слова: вейвлет-перетворення, стиснення зображення, цифрова обробка сигналів, цифровий потік.

FORMATION OF WAVELET - TRANSFORM SIGNALS TAKING INTO ACCOUNT THRESHOLD FUNCTIONS IN THE DIGITAL STREAM COMPRESSION PROBLEM

Valentina Solodka, Ph.D, O.S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Odessa, Ukraine. valyaonas@gmail.com

Olena Osharovska, Ph.D, Ass. Prof., O.S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications, Odessa, Ukraine. osharovskaya@gmail.com

Mukola Patlayenko, O.S. Popov Odessa National Academy of telecommunications, Odessa, Ukraine. nick_msa@ukr.net

Podolska Anastasia, O.S. Popov Odessa National Academy of telecommunications, Odessa, Ukraine. krasava66627@gmail.com

Abstract. In order to reduce the digital stream, the problem of improving the quality of digital filtering based on Discrete Wavelet Transformation (DWT) was analyzed using different options for setting the threshold function and the choice of wavelet basis. Given the considerable interest in this problem and the numerous studies concerning the search for ways to optimize the suppression of interference present in signals and images, the topic continues to be relevant and important. For such tasks as image compression, operations in processing and synthesis of different signals, in the analysis of images of different nature, in reducing (compressing) large amounts of information, and to protect information is often used wavelet transform, implemented on the basis of mirror filters. For the formation of wavelet-transform signals taking into account the threshold functions in the problem of digital stream compression, a standard approach to solving the problem of signal purification from interference and random distortions using Daubechies wavelet and adjusting the signal decomposition coefficients based on wavelet functions using soft and rigid threshold task options.

It is shown that the use of complex bases provides an advantage both in terms of threshold filtering error and in terms of reducing the risk of accidental distortion in the reconstruction of the useful signal by wavelet coefficients. Appropriate steps were taken for the test signal and experimental data. When using the threshold function, the large modulus (most significant) wavelet coefficients remain unchanged, and the small ones are reset to zero. The change in the amplitude of the recovered signal leads in the latter case to a decrease in the absolute values of all wavelet coefficients, including large modulo. For those applications where it is important to keep the amplitude characteristics constant, this approach is not suitable, but there are problems where it is more important to maintain the regularity of the signal than to accurately reproduce its amplitude. This is the filtering of images from various obstacles, where the method of "soft" task of the threshold function is a widely used approach. When analyzing signals, the constant amplitude is also not always a mandatory requirement. An audio signal can be amplified after filtering, and pre-cleaning it from interference is more important than changing the amplitude characteristics.

The use of complex wavelet transform allowed to obtain error reduction and lower threshold level when adjusting wavelet coefficients, and can be recommended for analysis

of complex wavelet transform methods as an effective tool for cleaning signals and images of different nature for further research.

Keywords: *wavelet transform, image compression, digital signal processing, digital stream.*

Вступ

З огляду на значний інтерес до даної проблеми і численні дослідження, пошук шляхів оптимізації придушення перешкод, присутніх в сигналах і зображеннях, продовжує залишатися актуальною і важливою. Для таких завдань, як стиснення зображень, операцій при обробці і синтезі різних сигналів, при аналізі зображень самої різної природи, при зменшенні (стисканні) великих обсягів інформації, та для захисту інформації досить часто використовується вейвлет перетворення, реалізоване на базі дзеркальних фільтрів [1, 2].

Для формування сигналів вейвлет – перетворення з урахуванням порогових функцій в задачі стиснення цифрового потоку необхідно розглянуто стандартний підхід до вирішення завдання очищення сигналу від перешкод і випадкових спотворень, що застосовує вейвлети Добеши і коригування коефіцієнтів розкладання сигналу по базису вейвлет-функцій із застосуванням м'якого і жорсткого варіантів завдання порогового значення.

Реалізація сигналів вейвлет – перетворення з урахуванням порогових функцій в задачі стиснення цифрового потоку

При реалізації алгоритмів швидкого розкладання сигналу в вейвлет-базисі довжина вибірки вибирається рівною мірою двійки $N = 2^J$, так як перехід від одного рівня декомпозиції до іншого (більш детальному) еквівалентно зменшенню вдвічі довжини вибірки.

$$y_{\text{нч}}(k) = (x * g)(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)g(k-i). \quad (1)$$

Збільшення M у імпульсній характеристиці ВЧ-фільтра $h(i)$ задається наступним чином

$$g(i) = (-1)^i h(2M - i - 1), \quad (2)$$

де постійна M визначає довжину області завдання вейвлет-базису та дозволяє використовувати симетричні функції (які мають нульові моменти), і гарантує мінімальну ймовірність помилки при відновленні стисненого сигналу після фільтрації.

Разом з цим, зі збільшенням M призводить до істотного зростання коефіцієнтів фільтра, що призводить до суттєвих недоліків (підвищення часу обчислень).

Затухаючі характеристики дискретного вейвлет перетворення при збільшенні M відчуває деякі недоліки при вирішенні деякого ряду завдань. У зв'язку з цим вибір вейвлет-перетворення повинен задовольняти залежно від пріоритетів і вибору сигналів в цифровій обробці сигналів [3, 4].

Для цифрової обробки сигналів, синтезу фільтрів, розпізнаванні об'єктів і стисненні зображень в якості основних функцій для реалізації ДВП застосовують вейвлети Хаара, Добеши [5].

Для $M \in N$, вейвлет D^{2^M} являє собою функцію виду $\psi = M^w \in L^2(R)$, яка визначається виразом

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} (-1)^k h_{2M-1-k} \varphi(2x-k), \quad (3)$$

де $h_0, \dots, h_{2M-1} \in R$ – постійні коефіцієнти, що задовольняють умові.

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{k=0}^{M-1} h_{2k+1}, \quad (4)$$

для $l = 0, 1, \dots, M-1$ виконується вимога

$$\sum_{k=2l}^{2M-1+2l} h_k h_{k-2l} = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Приклад функції вейвлета Добеши, що масштабується, наведено на рис. 1 при малих M коефіцієнти h_k можуть бути записані у вигляді точних виразів, наприклад, вейвлет D^4 задається коефіцієнтами:

$$h_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}); \quad h_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(3 + \sqrt{3});$$

при збільшенні M визначення h_k проводиться шляхом вирішення алгебраїчних рівнянь ступеня M . Незважаючи на те, що ці рівняння можуть бути вирішені за будь-якої необхідної точністю, значення h_k тепер задаються у вигляді таблиць (із заздалегідь визначеним числом розрядів).

Рис. 1 – Скейлінг-функція

Рис. 2 – вейвлет Добеши для $M=10$

Поглянемо скейлінг функцію для вейвлет-перетворення Добеши з $M=10$ (рис. 2). Як приклад наведемо набір коефіцієнтів ВЧ-фільтра, за допомогою якого визначається широко застосовуваний на практиці вейвлет D^8 :

$$\begin{aligned}h_0 &= -0,0757657, & h_1 &= -0,0296355, \\h_2 &= 0,4976187, & h_3 &= 0,8037388, \\h_4 &= 0,2978578, & h_5 &= -0,0992195, \\h_6 &= -0,0126040, & h_7 &= 0,0322231.\end{aligned}$$

У практичних обчисленнях зазвичай використовуються коефіцієнти з точністю до 32-х або 64-х десяткових розрядів.

Після одноразового проходження сигналом $x(i)$ квадратурних дзеркальних фільтрів з характеристиками $g(i)$ і $h(i)$, здійснюється проріджування вихідних сигналів, при якому вибираються парні або непарні відліки, що відповідає схемі субсмугового кодування. Це проріджування можна провести з тієї причини, що розглянута фільтрація призводить до зменшення в два рази частотного діапазону сигналу. Послідовності відліків, отриманих після квадратурних дзеркальних фільтрів, визначаються наступним чином:

$$y_{\text{НЧ}}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)g(2k-i), \quad y_{\text{ВЧ}}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(2k-i). \quad (6)$$

Зрізжені сигнали знову надходять на вхід фільтрів. Схематично процедура багато масштабного аналізу на основі одновимірного ДВП представлена на рис. 3.

Рис. 3 Схематичне уявлення одновимірного ДВП в рамках багато масштабного аналізу

Смуга частот сигналу змінюється при переході на наступний рівень дозволу і відповідне зменшення смуги частот.

Незважаючи на те, що в результаті проріджування кожен з часових рядів буде характеризуватися діапазоном частот вдвічі менше, ніж у сигналу до фільтрації, наявність двох послідовностей (на виході кожного фільтра) дозволяє однозначно відновити вихідний сигнал при зворотному перетворенні.

Коефіцієнти розкладання по вейвлет $d_{j,k}$ відображають амплітудні характеристики аналізованих процесів на різних рівнях дозволу. Для фільтрації перешкод невеликі по абсолютній величині вейвлет-коефіцієнти на малих масштабах (найбільш схильні до впливу флуктуацій) відкидають перед проведенням зворотного перетворення (метод порогової фільтрації). При цьому якість фільтрації істотно залежить від вибору варіанта завдання порогової функції [5], на яку збільшуються відповідні коефіцієнти перед зворотним перетворенням («м'який» або «жорсткий» - рис. 4) і від вейвлет-базису. Відповідний вибір сприяє отриманню більш високої якості очищення сигналу або зображення від перешкод.

Рис. 4 – Завдання порогової функції при вейвлет-фільтрації:
а - вихідний сигнал, б - «жорсткий» варіант завдання порогової функції,
в - «м'який» варіант завдання порогової функції

На рис. 4 зображені три варіанти завдання порогової функції $v(u)$ для коефіцієнтів вейвлет-перетворення. У варіанті (а) виконується рівність $v(u) = u$, яке означає відсутність коригувань коефіцієнтів, і в результаті зворотного перетворення буде отримано вихідний сигнал. У варіанті (б) функція задається у вигляді:

$$v(u) = \begin{cases} u, & |u| \geq C, \\ 0, & |u| < C. \end{cases} \quad (7)$$

При використанні такої порогової функції залишаються незмінними великі по модулю (найбільш значущі) вейвлет-коефіцієнти, і обнуляються малі. Нарешті, для варіанта (в) порогова функція вибирається так:

$$v(u) = \begin{cases} u - C, & u \geq C, \\ u + C, & u \leq -C, \\ 0, & |u| \leq C. \end{cases} \quad (8)$$

До зміни амплітуди відновленого сигналу приводе у останньому випадку зменшення абсолютних значень всіх вейвлет-коефіцієнтів, включаючи великі по модулю. Для тих додатків, де важливо зберегти незмінними амплітудні характеристики, такий підхід непридатний, проте існують завдання, де важливіше зберегти регулярність сигналу, ніж точно відтворити його амплітуду.

Як приклад, це фільтрація зображень від різних перешкод, де метод «м'якого» завдання порогової функції є широко використовуваним підходом. При аналізі сигналів збереження незмінною амплітуди також не завжди є обов'язковою вимогою. Також приклад є аудіо-сигнал після фільтрації може бути посилений, і попереднє очищення його від перешкод важливіше зміни амплітудних характеристик.

Що стосується аналізу зображень процедура розкладання по вейвлет передбачає перехід до двовимірної реалізації дискретного вейвлет-перетворення двовимірного ДВП [7]. Такий підхід, зокрема, використовується в комп'ютерній графіці в рамках формату JPEG2000. При практичній реалізації даного формату розглядається розширення одновимірного ДВП, при якому окремо аналізуються рядки і стовпці двовимірного зображення. У цьому випадку проводиться аналіз зображення по горизонталях, вертикалях і діагоналях з однаковим дозволом, і відповідні фільтри формуються на основі творів характеристик НЧ і ВЧ-фільтрів [6] для одновимірного випадку.

При аналізі сигналів або зображень дослідник має справу з сильно структурованими об'єктами, зокрема, порядок проходження відліків відображає важливі інформаційні характеристики. Внесення спотворень (наприклад, порушення кореляцій певної тривалості) буде впливати на якість інформаційного повідомлення, однак ці спотворення можуть не відбиватися в величині E . E не залежить від часових або просторових взаємозв'язків між вибірками вихідного сигналу. Стосовно до сигналів, зазвичай вводять в розгляд величину середньоквадратичної помилки

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(i) - y(i)]^2. \quad (9)$$

Дана величина дозволяє порівняти два сигнали і кількісно охарактеризувати ступінь подібності (або, навпаки, ступінь відмінності) між ними. Крім середньоквадратичної помилки або квадратного кореня з величини (9) при аналізі результатів фільтрації розглядають відношення сигнал / шум

$$SNR = 10 \lg \left(\frac{\sum_{i=1}^N [x(i)]^2}{\sum_{i=1}^N [x(i) - y(i)]^2} \right). \quad (10)$$

У формулі (10) $x(i)$ – вихідний сигнал, що містить флуктуації, $y(i)$ – відфільтрований сигнал, тобто оцінка сигналу, «очищеного» від шуму, і, відповідно, різниця значень $|x(i) - y(i)|$ характеризує шумову складову (в разі ідеального фільтра). Розрахунки кількісних критеріїв доцільно проводити на додаток до візуальної оцінки якості фільтрації.

Що стосується аналізу зображень формули (9) і (10) коригуються таким чином:

$$E = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M [x(i,k) - y(i,k)]^2,$$

$$PSNR = 10 \lg \left(\frac{255}{\sqrt{\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M [x(i,k) - y(i,k)]^2}} \right). \quad (11)$$

В даному випадку оцінюється так зване пікове відношення сигнал / шум «Peak Signal to Noise Ratio».

На рис. 5 наведені характерні приклади залежностей середньоквадратичної помилки фільтрації від вибору базисної функції сімейства вейвлетів Добеши. Відповідно до рис. 5а, найменша помилка досягається при виборі базису D^{17} (Відносна помилка фільтрації 2.8%), а на рис. 5б - для вейвлета D^{13} .

Рис. 5 – Залежно середньоквадратичної помилки фільтрації від вибору базисної функції сімейства вейвлетів Добеши при жорсткому варіанті завдання порогової функції і двох відносинах сигнал/шум: 30 дБ (а) і 3 дБ (б)

Для інших базисних функцій і відносин сигнал / шум при виконанні розрахунків також було зафіксовано наявність мінімуму помилки при варіюванні параметра C . Так, на рис. 6а, 6б продемонстровані залежності середньоквадратичної помилки від порогового рівня для функції D^{12} і відносин сигнал / шум 5 дБ і 30 дБ. При цьому розглядався м'який варіант завдання порогової функції. Як і раніше необхідно проводити вибір C залежно від дисперсії шуму. Ця обставина пояснюється тим, що при збільшенні інтенсивності присутніх флуктуацій необхідно збільшувати відносне число коректованих вейвлет-коефіцієнтів.

Щоб визначити оптимальне значення C , можна застосовувати підходи, засновані на апроксимації відповідної залежності, наприклад, поліноміальної апроксимації.

Рис. 6 – Залежно середньоквадратичної помилки вейвлет-фільтрації з використанням вейвлетів Добеши D^{10} (а, б) и D^{12} (в, г) і м'якого варіанта завдання порогової функції від величини порогового значення для траси сейсмограми при відносинах сигнал / шум 1 дБ (а), 20 дБ (б), 5 дБ (в), 30 дБ (г)

Рис. 7 – Залежно середньоквадратичної помилки вейвлет-фільтрації з використанням вейвлетів Добеши D^{10} і жорсткого варіанта завдання порогової функції від величини порогового значення для траси сейсмограми при відносинах сигнал / шум 3 дБ (а) і 20 дБ (б)

Незважаючи на те, що залежно, представлені на рис. 7, є в значній мірі «порізаними», вони також дозволяють зробити висновок про наявність мінімальної помилки, що досягається при відповідному виборі порогового значення.

Відповідно до рис. 8, при м'якому варіанті завдання порогової функції відбувається зниження помилки відновлення сигналу по його вейвлет-коефіцієнтами приблизно на 8% в порівнянні з жорстким варіантом. Ще один важливий момент, на який необхідно звернути увагу. Мінімум залежності помилки від величини C для м'якого варіанту досягається при менших значеннях C . Оскільки дана величина задає поріг для вейвлет-коефіцієнтів, які можуть бути обнульовані при фільтрації перешкод, зменшення C означає, що менша частина інформативних коефіцієнтів буде усуватися на етапі фільтрації. В результаті знижується ймовірність видалити коефіцієнти, які характеризують корисний сигнал, і, як наслідок, знижується ймовірність внесення випадкових спотворень. Даний висновок підтверджується додатковими розрахунками, проведеними при різних відносинах сигнал / шум. У всіх розглянутих випадках м'який варіант завдання порогової функції призводить до зниження ризику порогової фільтрації (рис. 8 б).

Рис. 8 – Залежно середньоквадратичної помилки вейвлет-фільтрації при використанні

вейвлетів Добеши D^{10} (а) і залежно оптимального порогового рівня від відносини сигнал / шум, дБ (б) для випадків м'якого (1) і жорсткого (2) варіантів завдання порогової функції

Таким чином, важливим завданням є вибір параметра C , який повинен проводитися з урахуванням рівня шуму в аналізованих експериментальних даних. До числа широко застосовуваних способів вибору відноситься універсальний пороговий рівень:

$$C = \sigma \sqrt{2 \ln N}, \quad (12)$$

де σ – стандартне відхилення шуму, N – число вейвлет-коефіцієнтів ($N \geq 4$). При проведенні дискретного вейвлет-перетворення число коефіцієнтів змінюється в 2 рази при переході від одного рівня дозволу до іншого. З цієї причини можуть застосовуватися як підходи на основі глобального введення

порогу (C є фіксованою величиною, що не залежить від рівня дозволу) [7], так і більш гнучкі підходи, що передбачають завдання різних порогових рівнів C_j в залежності від роздільної здатності j .

Висновки

Отже, підсумовуючи вище викладене, варто відмітити результати досліджень:

Було розглянуто стандартний підхід до вирішення завдання очищення сигналу від перешкод і випадкових спотворень, що застосовує вейвлети Добеши і коригування коефіцієнтів розкладання сигналу по базису вейвлет-функцій із застосуванням м'якого і жорсткого варіантів завдання порогового значення.

Було показано, що використання комплексних базисів забезпечує перевагу як з точки зору помилки порогової фільтрації, так і з точки зору зниження ризику випадкових спотворень при реконструкції корисного сигналу по вейвлет-коефіцієнтами. Відповідні висновки були зроблені для тестового сигналу і експериментальних даних.

У всіх розглянутих прикладах застосування комплексного вейвлет-перетворення призводило до зменшення помилки і зниження порогового рівня при коригуванні вейвлет-коефіцієнтів.

Проведені дослідження дозволяють рекомендувати метод комплексного вейвлет-перетворення в якості ефективного інструменту очищення від перешкод сигналів і зображень різної природи.

Література

1. Nason G.P. "Choice of the Threshold Parameter in Wavelet Function Estimation". In: Antoniadis A., Oppenheim G. (eds) *Wavelets and Statistics. Lecture Notes in Statistics*, vol 103. Springer, New York, NY, pp. 261-280, 1995. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2544-7_16
2. Lu Jing-yi, Lin Hong, Ye Dong, Zhang Yan-sheng, "A New Wavelet Threshold Function and Denoising Application", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2016, Article ID 3195492, p. 8, 2016. <https://doi.org/10.1155/2016/3195492>
3. Солодка В.И., Ошаровская Е.В., Патлаенко Н.А., "Вейвлет преобразование с рекуррентным алгоритмом сжатия", *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах (ВОТТП-14-2015)*. Матеріали 14 міжнародної НТК, 5 – 10 червня 2015: тези докл. Одеса, 2015. С. 189 – 190.
4. М.А. Патлаенко, О.В. Ошаровська, Н.С. Самусь, "Адаптивний пошук порогів квантування вейвлет коефіцієнтів", *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах (ВОТТП-16-2016)*. Матеріали 16 міжнародної НТК, 10 – 15 червня 2016: тези докл. Одеса, 2016. С. 173.
5. Oleg Gofaizen, Olena Osharovska, Mikola Patlaenko, Volodimir Pyliavskiy. "Complex Algorithm of Image Wavelet Compression: Distortion Evaluation in the Light of Trade of Contour Separation and Compression Ratio", 2018 9-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals. Conference Program. Book of Abstracts September 4-7, 2018, Odessa IEEE Kharkiv, 2018. P. 131-135. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2018.8520013.
6. Patlaenko N. "Analysis the functions of wavelet transform to compress content in television production", *Proceedings of the XIII-th International Conference TCSET'2016 "Modern problems of radio engineering, telecommunications and computer science"*, February 23-26, 2016.

Lviv-Slavske, Ukraine, IEEE Ukraine Section. Lviv, Publishing House of Lviv Polytechnic, 2016. P. 758 - 760.

7. Mikola Patlayenko, Olena Osharovska, Volodymyr Pyliavskiy and Valentina Solodka, "Wavelet Feature Family for Image Compression". 27-th National conference "Telecom 2019", 30-31 October 2019, National science and Technical Center, Sofia, Bulgaria, P.15 – 18.

References

1. Nason G.P. "Choice of the Threshold Parameter in Wavelet Function Estimation." In: Antoniadis A., Oppenheim G. (eds) *Wavelets and Statistics. Lecture Notes in Statistics*, vol 103. Springer, New York, NY. pp. 261-280, 1995. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2544-7_16

2. Lu Jing-yi, Lin Hong, Ye Dong, Zhang Yan-sheng, "A New Wavelet Threshold Function and Denoising Application", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2016, Article ID 3195492, p. 8, 2016. <https://doi.org/10.1155/2016/3195492>

3. V.I. Solodka, E.V. Osharovskaya, N.A. Patlaenko, "Wavelet transform with a recursive compression algorithm," *Vimiryuvalna and numerical technology in technological processes (VOTTP-14-2015)*. Materials of the 14th International Scientific and Technical Conference, 5 - 10 April 2015: abstracts. Odessa, 2015.- P. 189 - 190.

4. M.A. Patlaenko, O. V. Osharovska, N.S. Samus, "Adaptive shake of thresholds for quantizing wavelet coefficients", *Vimiryuvalna and numerical technology in technological processes (VOTTP-16-2016)*. Materials of the 16th International Scientific and Technical Conference, 10 - 15 June 2016: abstracts of reports. Odessa. 2016. P. 173.

5. Oleg Gofaizen, Olena Osharovska, Mikola Patlaenko, Volodymyr Pyliavskiy. "Complex Algorithm of Image Wavelet Compression: Distortion Evaluation in the Light of Trade of Contour Separation and Compression Ratio", 2018 9-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals. Conference Program. Book of Abstracts September 4-7, 2018. Odessa, IEEE Kharkiv, 2018. P. 131-135. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2018.8520013.

6. Patlaenko N. "Analysis the functions of wavelet transform to compress content in television production", *Proceedings of the XIII-th International Conference TCSET'2016 "Modern problems of radio engineering, telecommunications and computer science"* February 23-26, 2016. Lviv-Slavske, Ukraine, IEEE Ukraine Section. Lviv, Publishing House of Lviv Polytechnic, 2016. P. 758 - 760.

7. Mikola Patlayenko, Olena Osharovska, Volodymyr Pyliavskiy and Valentina Solodka. "Wavelet Feature Family for Image Compression." 27-th National conference "Telecom 2019", 30-31 October 2019, National science and Technical Center, Sofia, Bulgaria, P.15 – 18.